

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**  
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**IX. Osztály**

**1.** Egy sugárúton 100 lámpaoszlop van és ezek 1, 2, ..., 100 –ig vannak megszámozva. Eredetileg, a látvány kedvéért, az 1, 4, 7, ... (és így tovább) lámpák sárga fényűek, a többi pedig fehér fényű. A téli ünnepek alkalmával, a 100-ik lámpával kezdődően és kettesével csökkenő sorrendben minden lámpára egy kék szűrőt szereltek. Így a kevert színek tulajdonsága alapján egy része a lámpáknak fehér- illetve egy része sárga színű marad, egy másik része kék színű lesz (fehér + kék = kék), míg egy másik része zöld színű lesz (sárga + kék = zöld). Határozzuk meg, hogy a 100 lámpából, minden színből hány darab lámpa lesz.

**2.** Egy előadástérben az ülőhelyek soronként vannak elrendezve. Minden sorban, a másodiktól kezdve, két ülőhellyel több van, mint az előtte levő sorban. Ha tudjuk, hogy az első sorban 38 hely, a térben pedig összesen 2010 hely van, határozzuk meg hány sorban vannak elrendezve az ülőhelyek.

**3.** Minden  $a \in \mathbb{R}$  esetén tekintsük az  $E(a)$ -val jelölt  $x^2 - 2x + (2011 - a) = 0$  egyenletet.

a) Határozzuk meg az  $a \in \mathbb{R}$  értékeit, amelyekre az  $E(a)$  egyenletnek valós gyökei vannak.

b) Határozzuk meg az  $E(a)$  egyenlet gyökeinek összegét és szorzatát.

c) Határozzuk meg az  $a \in \mathbb{R}$  értékeit, amelyekre az  $E(a)$  egyenletnek mindkét gyöke természetes szám.

d) Határozzuk meg az  $a \in \mathbb{R}$  értékeit, amelyekre az  $E(a)$  egyenletnek mindkét gyöke racionális szám.

**4.** Egy bádoglap alakja egy olyan  $A$ -ban derékszögű  $ABC$  háromszög, amelyben  $m(\sphericalangle ACB) = 36^\circ$ . A lapon meghúzzuk az  $[AM]$  és  $[BN]$  szakaszokat úgy, hogy  $M \in (BC)$  és  $CM = AC$  illetve  $N \in (AC)$  és  $AN = BM$ . Igazoljuk, hogy:

a) ha  $AM \cap BN = \{P\}$ , akkor  $P$  a  $[BN]$  szakasz felezőpontja;

b) ha az  $[AM]$  és  $[BN]$  mentén elvágjuk a lapot, akkor három egyenlőszárú háromszöget kapunk.

*Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden tétel kötelező; Minden tétel pontozása 0-tól 7 pontig terjed*

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**  
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**X. Osztály**

**1.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a)  $\log_3(x+3) \cdot \log_{x-3} 3 = 2, x \in \mathbb{R};$

b)  $4^x - 9^x = 10^x - 15^x, x \in \mathbb{R}.$

**2.** Legyen  $\mathbb{C}$  a komplex számok halmaza, akkor:

a) Igazoljuk, hogy bármely  $z \in \mathbb{C}$  esetén, ha  $\bar{z} = z$  akkor  $z$  egy valós szám ( $\bar{z}$ , a  $z$  komplex szám konjugáltja);

b) Igazoljuk, hogy bármely két  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$  komplex szám esetén,  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  és

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

c) Igazoljuk, hogy bármely  $z \in \mathbb{C}$  esetén,  $z + \bar{z}$  és  $z \cdot \bar{z}$  valós számok.

d) Ha  $z = \frac{2010 + 2011i}{2011 + 2010i}$  mutassátok ki, hogy  $z \cdot \bar{z} = 1$  és  $\bar{z}(z^2 + 1) \in \mathbb{R}.$

**3.** Egy egérke populáció 25%-a fehér a többi fekete. A fehérek 50%-a, míg a feketék csak 20%-a kék szemű. Ha 99 kék szemű egérke van, határozzuk meg hány egérke van összesen.

**4.** Egy biokémiai kísérlet azt tanulmányozza, 10 másodperces időközökben, hogy egy adott közeg hogyan viselkedik egy jellegzetes hőmérséklet ingadozás esetén. Kísérlet közben egy termosztát szabályozza a tanulmányozott közeg hőmérsékletét a pillanat tényező függvényében úgy, hogy minden  $t \in [0; 10]$  pillanatban a vizsgált közeg hőmérséklete  $T(t) = \left[ \sqrt{t^2 - 6t + 81} \right]$  fok, ahol  $[m]$  az  $m$  szám egészrészét jelöli. (Például  $\left[ \sqrt{76} \right] = 8$  mivel  $\sqrt{76} \in [8; 9)$ ).

a) Határozzuk meg a közeg hőmérsékletét a kísérlet kezdeti-, valamint végső pillanatában;

b) Határozzuk meg azt, hogy a kísérlet alatt előfordul-e legalább még egyszer a kezdés időpontjában mért hőmérséklet, és ha igen számítsunk ki egy ilyen időpontot;

c) Igazoljuk, hogy a termosztát nem engedi meg a közeg hőmérsékletének csökkenését 8 fok alá;

d) Határozzuk meg, hogy mennyivel egyenlő egy kísérlet alatt, a közeg által elért maximális hőmérséklet;

e) Igazoljuk, hogy a maximális hőmérsékletet, egy kísérlet alatt csak egyszer éri el.

*Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden tétel kötelező; Minden tétel pontozása 0-tól 7 pontig terjed*

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**  
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**XI. Osztály**

**1.** Adott az  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  mátrix és a  $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) / A \cdot X = X \cdot A\}$  halmaz.

a) Számítsuk ki az  $A^2$  és  $A^3$  mátrixot;

b) Mutassuk ki, hogy a  $C(A)$  halmaz elemei  $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$  alakú mátrixok;

c) Mutassuk ki, hogy az  $X^3 = O_3$  egyenletnek végtelen sok megoldása van a  $M_3(\mathbb{C})$  halmazon;

d) Mutassuk ki, hogy az  $X^3 = A$  egyenletnek nincs megoldása a  $M_3(\mathbb{C})$  halmazon;

**2.** Határozzuk meg az  $a$  és  $b$  valós számokat úgy, hogy  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - b}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16}$

**3.** Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A \in M_3(\mathbb{R})$  alakú mátrixok.

a) Számítsuk ki  $\det A$ ;

b) Mutassuk ki, hogy létezik ilyen alakú  $A$  mátrix amelyre,  $\det A = 0$  és amelyben a nem a főátlón található elemek 2011 vagy  $-2011$ -el egyenlők;

c) Mutassuk ki, hogy létezik ilyen alakú  $A$  mátrix amelyre,  $\det A = 0$  és amelyben a nem a főátlón található elemek, páronként különböző, nemnulla egész számok

d) A következő játékban a mellékelt ábrán látható, mátrix alakú táblát használunk. Két játékos sorban kitölti a hat üresen hagyott négyszöget úgy, hogy minden üres négyszögbe egy nemnulla egész számot ír.

A kezdő játékos nyer, ha a kitöltött mátrix determinánsa nem nulla, a másik játékos pedig akkor, ha a determináns nulla.

Állítsunk fel egy stratégiát, melynek alapján a második játékos nyer, függetlenül a kezdő játékostól.

$$\begin{pmatrix} 0 & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & 0 \end{pmatrix}$$

**4.** Egy szerkezet valamely alkatrészének alakja egy olyan négyszög, amelynek csúcsai a derékszögű koordináta rendszerben az  $A(2;2)$ ,  $B(9;1)$ ,  $C(14;6)$  és  $D(1;5)$  pontok, a mértékegység  $1 \text{ cm}$ .

a) Határozzuk meg a  $BD$  átló  $M$  felezőpontjának koordinátáit;

b) Igazoljuk, hogy az  $M$  pont a négyszög átlóinak metszéspontja ( $A$ ,  $M$ ,  $C$  – kollineáris pontok);

c) Határozzuk meg a négyszög területét;

d) Ha a négy csúcs közül három, egy a lemez belsejében képezhető paralelogramma csúcsa, akkor határozzuk meg a paralelogramma területét.

*Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden tétel kötelező; Minden tétel pontozása 0-tól 7 pontig terjed*

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**  
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**XII. Osztály**

1. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x \circ y = 2011 \cdot (xy - x - y) + 2012$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  műveletet.

a) Igazoljuk, hogy  $x \circ y = 2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

b) Igazoljuk, hogy a műveletet asszociatív és  $x \circ y \circ z = 2011^2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) + 1$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ;

c) Igazoljuk, hogy a  $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  halmaz stabil részhalmaza  $\mathbb{R}$ -nek a „ $\circ$ ” műveletre nézve és  $(G; \circ)$  egy kommutatív csoport;

d) Oldjuk meg az  $x \circ x \circ x \circ x = 2011^7 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  egyenletet.

2. Igazoljuk, hogy:

a)  $1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$ , bármely  $x \in [0; 1]$  esetén;

b)  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$  és alkalmazva esetleg az a) alpontot igazoljuk, hogy:  $\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{5}{6}$ ;

c)  $\frac{455}{528} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \leq \frac{61}{66}$ .

3. Adottak az  $f$ ,  $g$  és  $h$  függvények a következőképpen:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ ;  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$g(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$  és  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in (-\infty; 1) \\ g(x), & \text{ha } x \in [1; +\infty) \end{cases}$

a) Indokoljuk meg az  $f$ ,  $g$ ,  $h$  függvények primitíválhatóságát és számítsuk ki:  $\int f(x) dx$ ,  $\int g(x) dx$ ,  $\int h(x) dx$ ;

b) Indokoljuk meg a  $h$  függvény integrálhatóságát a  $[0; e]$  intervallumon és számítsuk ki:  $\int_0^e h(x) dx$ .

4. Egy számítógépes program a következőképpen működik:

Induláskor, a számítógép képernyőjén a mellékelt ábra szerint 5 ablakocska jelenik meg és kéri a felhasználót, hogy az  $n_1, n_2, n_3, n_4$  ablakocskák mindegyikében írjon be egy-egy nemnulla valós számot.

Az  $n_1, n_2, n_3, n_4$  valós számok beírása után, az ötödik ablakocskában a

program azonnal megjeleníti az  $S = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}$  összeg értékét.

Továbbá a program a következőképpen működik:

Az egér mindenegyes egymásutáni klikkelésére az  $n_1, n_2, n_3, n_4$  ablakocskák közül bármely kettőben, ahol mondjuk, két  $a$  és  $b$  szám jelenik meg, ezeket automatikusan kicseréli az  $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$  és  $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$  számokkal és az ötödik ablakocskában megjeleníti az  $S$  összeg új értékét.

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
ÎN ACEST MOMENT REZULTATUL SUMEI			
$S = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}$			
ESTE			
<input type="text"/>			

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului**

Igazoljuk, hogy:

a) Ha  $a \cdot b \neq 0$  akkor  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$  és  $a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ ;

b) Ha  $a \cdot b \neq 0$  akkor  $\frac{1}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ;

c) Ha a felhasználó, induláskor 4 számot választ és a képernyőn az  $S = 2011$  összeg jelenik meg, akkor a program futtatásának bármely pillanatában a képernyőn megjelenített  $S$  összeg mindvégig 2011 marad;

Ha a felhasználó, induláskor a 8044, 8045, 8046 és 80474 számokat választja, akkor a program futtatásának bármely pillanatában a négy megjelenített számok közül egyik sem lesz 2011.

***Megjegyzés:** Munkaidő 3 óra; Minden tétel kötelező; Minden tétel pontozása 0-tól 7 pontig terjed*